2/И в а н о в Г.И. Конгруэнции парабол с неопределенными фокальными поверхностями.- Тр.Томского ун-та. Геом.сб. ,255,1974,с.203-226.

3.И в а н о в Г.И. Об одном классе конгруэнций парабол с неопределенными фокальными поверхностями.- Тр. Томского ун-та.Геом.сб. 17,1976,с.72-76.

4.М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными свойствами.- Тр.Томского ун-та.Геом.сб. 160,1962,с.5-14.

5.М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.7,1976.с.54-61,

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

В.Б. К и м

КОМПЛЕКС НЕОСОБЕННЫХ КУБИК В P_3

1.Рассмотрим трехмерное проективное пространство P_3 ,отнесенное к подвижному реперу $\{A_J\}$,деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_J = \omega_J^K A_K \quad (J,K,L=0,1,2,3). \tag{1}$$

Формы Пфаффа ω_J^K удовлетворяют уравнениям структуры

$$d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K \tag{2}$$

и условию

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{3}$$

В P_3 рассмотрим комплекс неособенных кубик.В репере нулевого порядка кубика K_3 задается уравнениями

$$x^0 = 0, \qquad a_{ijk} x^i x^j x^k = 0. \tag{4}$$

Тогда уравнения комплекса кубик можно записать в виде

$$\Theta_{ijk} = b_{ijk}^{\ell} \omega_\ell \quad (i,j,k,\ell,m=1,2,3). \tag{5}$$

Здесь

$$\omega_i = \omega_i^0,$$

$$\Theta_{ijk} = da_{ijk} - a_{ijk,m}^{\ell}\, \omega_\ell^m, \tag{6}$$

$$a_{ijk,m}^{\ell} = a_{mjk}\delta_i^\ell + a_{imk}\delta_j^\ell + a_{ijm}\delta_k^\ell - 3a_{ijk}a_{11m}\delta_1^m.$$

Функции $a_{ijk,m}^{\ell}$ и b_{ijk}^{ℓ} удовлетворяют системе уравнений

$$\nabla a^{\ell}_{ijk,m}+3(a_{ijk,m}a_{11n}+a_{ijk}a^{\ell}_{11n,m})\omega^n_1=A^{\ell n}_{ijk,m}$$
$$\nabla b^{\ell}_{ijk}+3(a_{ijk}b^{\ell}_{11m}+a_{11m}b^{\ell}_{ijk})\omega^m_1-3a^{\ell}_{ijk,m}\omega^m_0=b^{\ell m}_{ijk}\omega_m. \tag{7}$$

Здесь ∇ -оператор ковариантного дифференцирования. Непосредственным вычислением убеждаемся,что имеет место соотношение

$$\operatorname{rang}\|a^{\ell}_{ijk,m}\|=8. \tag{8}$$

При этом строчки матрицы соответствуют тройке индексов (ijk) ,а столбцы - паре индексов $\binom{\ell}{m}$.

Так как действие проективной группы на многообразии кубик $R(K_3)$ нетранзитивно [1],то в дальнейшем будем рассматривать лишь подмногообразие $R_1(K_3)$ проективно эквивалентных кубик.Оно выделяется уравнением

$$dJ=0, \tag{10}$$

где J - абсолютный инвариант кубики,точное значение которого мы не приводим в силу его громоздкости.Не умаляя общности,можно считать,что

$$\frac{\partial J}{\partial a_{123}}\neq 0.$$

Тогда из (I0) получаем

$$da_{123}=-\frac{\partial J/\partial a_{ijk}}{\partial J/\partial a_{123}}\,da_{ijk}. \tag{11}$$

Условимся,что в дальнейшем тройка индексов (ijk) не принимает значения (I23).

Помимо (8) функции $a^{\ell}_{ijk,m}$ будут связаны соотношениями

$$a^{\ell}_{123,m}=\lambda^{ijk}_{123}a^{\ell}_{ijk,m}. \tag{12}$$

Из (5),(II) и (I2) получаем

$$\lambda^{ijk}_{123}=\frac{\partial J/\partial a_{ijk}}{\partial J/\partial a_{123}}, \tag{13}$$

$$b^{\ell}_{123}=\lambda^{ijk}_{123}b^{\ell}_{ijk}. \tag{14}$$

2. В силу (8) мы можем записать

$$\theta_{ijk}=da_{ijk}-a^{p}_{ijk,q}\Omega^q_p, \tag{15}$$

где

$$\Omega^q_p=\omega^q_p-\delta^q_p\omega^1_1. \tag{16}$$

Аналогичный переход к формам Ω^q_p можно сделать в уравнениях (6) и (7).

Формы ω_i и Ω^q_p удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_i=(\omega^j_i-\delta^j_i\omega^0_0)\wedge\omega_j,$$
$$d\Omega^q_p=\Omega^r_p\wedge\Omega^q_r-\delta^q_p\Omega^r_1\wedge\Omega^1_r+\Omega^{qi}_p\wedge\omega_i, \tag{17}$$

где

$$\Omega^{ai}_1=-\delta^i_1\omega^a_0,\quad \Omega^{1i}_a=-\delta^i_a\omega^1_0,$$
$$\Omega^{bi}_a=\delta^i_1\delta^b_a\omega^1_0-\delta^i_a\omega^b_0.$$

Здесь и далее индексы a,b,c принимают значения 2, 3,а пары индексов $\binom{p}{q},\binom{r}{s},\binom{p}{r}$ -все возможные значения,кроме $\binom{1}{1}$.

Уравнения (I7) являются структурными уравнениями главного расслоения P проективных реперов $\{A_i\}$ в плоскости кубики со структурной группой $PG(2,R)$ [2].

Формы $\tilde{\Omega}^q_p=\Omega^q_p+\Gamma^{qi}_p\omega_i$ будут определять на расслоении P связность Γ тогда и только тогда,когда функции Γ^{qi}_p подчиняются уравнениям

$$\nabla \Gamma^{qi}_p - \delta^q_p(\Gamma^{ai}_1 \Omega^1_a + \Gamma^{1i}_a \Omega^a_1) + \Omega^{qi}_p = \Gamma^{qij}_p \omega_j . \quad (18)$$

Если на расслоении P задано поле объекта $\{Y^A\}$

$$dY^A - Y^{A,p}_q(Y^B)\Omega^q_p = Y^{Ai}\omega_i ,$$

то неголономная ковариантная производная объекта $\{Y^A\}$ относительно связности Γ определяется по формуле [3]

$$\underset{\Gamma}{D}^i Y^A = Y^{A,p}_q \Gamma^{qi}_p - Y^{Ai}. \quad (19)$$

3.Так как

$$\det \| a_{ijk,q}{}^{p} \| \neq 0 , \quad (20)$$

то мы можем ввести новые значения $a^{ijk,p}_q$ по формулам

$$a^{ijk,p}_q \cdot a_{ijk,s}{}^{r} = \delta^p_s \delta^r_q , \quad (21)$$

$$a^{ijk,p}_q \cdot a_{\ell mn,p}{}^{q} = \delta^i_\ell \delta^j_m \delta^k_n . \quad (22)$$

Рассмотрим величины

$$H^{q\ell}_p = a^{ijk,q}_p \, b^\ell_{ijk} , \quad (23)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla H^{q\ell}_p + \delta^q_p (H^{1\ell}_a \Omega^a_1 - H^{a\ell}_1 \Omega^1_a) + \Omega^{q\ell}_p = H^{q\ell m}_p \omega_m . \quad (24)$$

Сравнивая (24) и (18), получаем, что функции $H^{q\ell}_p$ образуют объект связности, определяемой формами

$$\tilde{\Omega}^q_p = \Omega^q_p + H^{qi}_p \omega_i .$$

Обозначим эту связность через H .

Т е о р е м а. Неголономная ковариантная производная объекта $\{a_{ijk}\}$ относительно связности H равна нулю.

Доказательство теоремы непосредственно следует из (5),(6),(19),(21),(23). Заметим, что связность H является единственной связностью на главном расслоении P, удовлетворяющей условию теоремы.

4.Дополнив систему величин $\{H^{qi}_p\}$ величинами H^{1i}_1 по формуле

$$H^{1i}_1 = -\frac{1}{3}(H^{2i}_2 + H^{3i}_3),$$

введем в рассмотрение функции

$$a^i = \frac{3}{8} H^{ij}_j , \quad (25)$$

являющиеся решениями уравнений

$$\nabla a^i - \delta^i_j q^j \omega^0_0 + \omega^i_0 = a^{ij}\omega_j . \quad (26)$$

Рассмотрим точку

$$M = A_0 + a^i A_i . \quad (27)$$

Так как при фиксированных первичных параметрах

$$\delta M = \pi^0_0 M ,$$

то точка M инвариантным образом присоединена к плоскости кубики и, следовательно, является оснащающей точкой.

Список литературы

1.К и м В.Б. О многообразии кубик в проективном пространстве.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур .Вып.7.Калининград,1976,с.39-44.

2.Л у м и с т е Ю.Г.Проективные связности в канонических расслоениях плоскостей.-Матем.сб.1973,91(133), с.211-233.

3.Б л и з н и к а с В.Й.Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов.-Литов.матем.сб.,1966,1,№2,с.142-214.